| | |
|---|---|
| Title | 非斉次二次元熱方程式に対する振動型評価 (幾何学的偏微分方程式における保存則と正則性特異性の研究) |
| Author(s) | 猪奥, 倫左 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (2013), 1845: 153-165 |
| Issue Date | 2013-07 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/195035 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

数理解析研究所講究録
第 1845 巻 2013 年 153-165



# 非斉次二次元熱方程式に対する振動型評価

猪奥 倫左 (Norisuke Ioku)
東北大学大学院理学研究科 数学専攻
Mathematical Institute, Tohoku University

## 1 導入

本稿では, 非斉次二次元熱方程式の解の時空間可積分性を外力項 $f$ の可積分性から決定する問題を考察する. 空間次元を 2 とし, 有界領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^{2}$ 上で, 次の熱方程式の非斉次境界値問題を考える.

$$\begin{cases} u_{t}-\Delta u=f, & (t,x)\in(0,T)\times\Omega,\\ u(0,x)=0, & x\in\Omega,\\ u=0, & (t,x)\in(0,T)\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここでは特に外力項 $f$ の影響について調べるため, 簡単のため初期値を恒等的に 0 とする.

### 1.1 Poisson 方程式について

まず始めに, なぜ二次元空間に限定して考察するかを述べるため, 定常問題である Poisson 方程式を一般次元の有界領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^{n}$ 上で考察する.

$$\begin{cases} -\Delta u=f & \text{in} \quad \Omega\subset\mathbb{R}^{n},\\ u=0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Lebesgue 空間 $L^{p}(\Omega)$ を $p$ 乗可積分な関数全体の集合とし, $L^{\infty}(\Omega)$ を $\Omega$ 上有界な関数全体の集合とする. さらに Sobolev 空間 $W^{k,p}(\Omega)$ は $k$ 階の導関数が $p$ 乗可積分となる関数全体の集合とする. よく知られた事実として, 外力が $f\in L^{p}(\Omega)$ $(\frac{n}{2}<p<\infty)$ のとき, 解 $u$ は $u\in W^{2,p}(\Omega)$ に属する (cf. Gilbarg-Trudinger [14]). この結果は楕円型正則性と呼ばれ, Laplacian と一般の二階弱微分が $L^{p}(\Omega)$ の意味で同値になることを示している. さらに, $p>\frac{n}{2}$ に注意すると Sobolev の埋め込み定理から, 解 $u$ は Hölder 連続性を満たすことがわかる. 一方, 外力 $f$ を $L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ から選ぶとき, 解は楕円型正則性から $W^{2,\frac{n}{2}}(\Omega)$ に属するが, Sobolev の埋め込み定理が破綻するため, 一般に連続性を満たさない. さらに, 一般に

有界にすらならないことも知られている. この意味で, $p=\frac{n}{2}$ は Sobolev の埋め込み定理の意味での臨界指数と呼ばれている.

次に $n=2$ の場合を考察する. 高次元 Poisson 方程式の場合と同様に指数 $p>\frac{2}{2}=1$ として外力 $f$ を $L^p(\Omega)$ から選ぶと, 楕円型正則性から解は $W^{2,p}(\Omega)$ に属し, Sobolev の埋め込み定理から解は Hölder 連続性を満たす. 一方で $p=1$ のとき, 楕円型正則性が破綻するため解は $W^{2,1}(\Omega)$ に属さない. この事実は, 二次元における臨界正則性が高次元の場合と異なることを意味する. 以上のことから, 二次元 Poisson 方程式に対する外力項 $L^1(\Omega)$ に属する場合の正則性問題は, Sobolev の埋め込み定理, 楕円型正則性の両者が破綻する二重臨界の問題となっている. そのため本節では以下, 空間次元を二次元に固定し, 二次元有界領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 上での Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in} \quad \Omega\subset\mathbb{R}^2, \\ \quad u=0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

について考察する.

この臨界問題に対し, Brezis-Merle [8] は $f\in L^1(\Omega)$ のときに, (1.2) の解は一般には有界とはならないが, 指数可積分性を満たすことを証明した. 即ち, 任意の $0\le\alpha<4\pi$ に対してある定数 $C>0$ が存在して

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{\alpha|u(x)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}\right)dx \le C|\Omega| \tag{1.3}$$

を満たすことを示した. さらに可積分性の上限を与える指数 $4\pi$ が最良であることも彼らによって示させている. この解の指数可積分性は, 領域 $\Omega$ が有界領域であることに注意すると, 解の有界性よりも弱い正則性であることがわかる. 上述の結果は可積分性に対するものであるが, 異なる観点からの臨界正則性として, 外力に同じ仮定 $f\in L^1(\Omega)$ を課したとき解は関数空間 $BMO$ (Bounded Mean Oscillation) に属し,

$$[u]_{BMO}\le C\|f\|_{L^1} \tag{1.4}$$

を満たすことが知られている. ここで

$$[u]_{BMO} := \sup_{B;\mathrm{ball}\subset\Omega}\frac{1}{|B|}\int_B |u(x)-u_B|dx, \quad u_B := \frac{1}{|B|}\int_B u(x)dx \tag{1.5}$$

で定義される. 定義において $\frac{1}{|B|}\int_B|u(x)-u_B|dx$ は関数の振動の平均を表している. 従って, $BMO$ は, 関数の振動の平均が有界（Bouded Mean Oscillation）となる関数全体を表す関数空間である. なお, 平均振動の有界性に注目した結果が, Dolzmann-Hungerbühler-Müller [13] によってより抽象的で適用範囲の広い問題に対して考察されていることを注意しておく.

John-Nirenberg による有名な事実として, $BMO$ に属する関数は, 次の分布関数に関する評価を満たすことが知られている.

**命題 1.1** (John-Nirenberg [19]). $u \in BMO$ とする. このとき, ある定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して, 任意の球 $B \subset \Omega$ と任意の $\lambda > 0$ に対して

$$|\{x \in B; |u(x) - u_B| > \lambda\}| \leq C_1 \exp(-C_2\lambda/[u]_{BMO})|B|$$

が成り立つ.

この John-Nirenberg の不等式から $u \in BMO$ ならば, $u$ は指数可積分性を満たすことが導かれる. 即ち, $u \in BMO$ とすると, ある定数 $\alpha > 0$ が存在して, 任意の球 $B \subset \Omega$ に対して

$$\frac{1}{|B|}\int_B \exp(\alpha|u(x) - u_B|)dx < \infty$$

が成り立つ. これらの事実と $BMO$ 評価 (1.5) を合わせると, Brezis-Merle の指数可積分性 (1.3) と同様の指数可積分評価を示すことができる. しかし, Brezis-Merle は指数可積分性の最良定数 $4\pi$ にまで言及したが, $BMO$ 評価から John-Nirenberg の不等式を経由する手法では最良定数を導くことはできないため, $BMO$ 評価 (1.5) と Brezis-Merle の不等式 (1.3) はどちらかがどちらかを含む形になっておらず, 両者の結果は互いに異なる長所を持っている.

上述の臨界型指数可積分性に関連する結果として, 外力を Lebesgue 空間の拡張の一つである Lorentz-Zygmund 空間からとった場合の可積分性評価が知られている. 主張を述べるために次の再配列関数を用いる.

**定義 1.2** (再配列関数). $f$ の分布関数を

$$\mu_f(\lambda) := \big|\{x\,;\, |f(x)| > \lambda\}\big|$$

とおき, $f$ の球対称再配列関数 $f^\sharp$ を

$$f^\sharp(r) := \inf\{\lambda\,;\, \mu_f(\lambda) \leq |B_r|\}$$

で定める. また, 球対称再配列関数 $f^\sharp$ の積分平均を $f^{\sharp\sharp}$ とおく. 即ち,

$$f^{\sharp\sharp}(r) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f^\sharp(y)dy$$

とする.

**注意 1.2.1.** 球対称再配列関数 $f^\sharp$ と一次元再配列関数

$$f^*(r) := \inf\{\lambda\,;\, \mu_f(\lambda) \leq r\}$$

は定義における次元の違いから種々の計算が変わるが, それらは本質的に同じである.

この再配列関数 $f^\sharp$ を用いて Lorentz-Zygmund 空間 $L(\log L)^p(\Omega)$ を次で定義する．指数 $0 \le p < \infty$ に対して，

$$L(\log L)^p(\Omega) := \left\{ f \in L^1(\Omega)\,;\, \|f\|_{L(\log L)^p} := \int_{B_R} \left(\log \frac{R^2}{|x|^2}\right)^p f^\sharp(x)dx < \infty \right\}.$$

また，可積分性に着目した関数空間の一つである Orlicz 空間を次で定める．指数 $p \ge 1$ に対して

$$\exp L^p(\Omega) := \left\{ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega); \|u\|_{\exp L^p(\Omega)} < \infty \right\}.$$

ここでノルム $\|\cdot\|_{\exp L^p(\Omega)}$ は次の Luxemburg ノルムとする．

$$\|u\|_{\exp L^p(\Omega)} := \inf \left\{ \alpha > 0; \int_\Omega \left\{ \exp\left(\frac{|u(x)|}{\alpha}\right)^p - 1 \right\} dx \le 1 \right\}. \tag{1.6}$$

Orlicz 空間の詳細な性質は [1, 6] などを参照されたい．

以上の設定のもと，Passarelli di Napoli-Sbordone [26] は次を示した．

**定理 1.3** ([26, 16])**.** 外力項 $f$ を $L(\log L)^p(\Omega)$, $0 < p \le 1$ から選ぶ．さらに，$u$ を境界値問題 (1.2) の超関数解とする．このとき，ある正定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|u\|_{\exp L^{\frac{1}{1-p}}(\Omega)} \le C\|f\|_{L(\log L)^p(\Omega)} \tag{1.7}$$

が成り立つ．また，$p = 1$ のとき，

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\|f\|_{L(\log L)^1(\Omega)}$$

が成り立つ．

Alberico-Ferone [2] は，二次元有界領域上での線形楕円型方程式の解について，外力を Lorentz 空間から選ぶ場合，解が同様の指数関数型の可積分性を満たすことを示した．Trombetti [28] はそれを二次元準線形楕円型方程式に拡張した．また，Aguilar-Peral [3] は Brezis-Merle の指数可積分性を $n$ 次元有界領域上での $n$-Laplace 方程式の解に対して証明し，更に Boccardo-Peral-Vazquez [7], I. [16] では $n$-Laplace 方程式の解が有界となるための条件と細分化された指数可積分性について言及されている．更に，Cianchi [10, 11, 12] によって，Orlicz 空間における実補間論を基礎とする正則性理論が考察されている．

## 1.2 二次元熱方程式について

上述の Poisson 方程式に対する，外力項 $f \in L^1(\Omega)$ における臨界性は，放物型方程式の解の時空間可積分評価を考察する際にも現れる．

放物型方程式における時空間可積分評価として，次の最大正則性が知られている．時刻 $T > 0$ とし，外力を $L^q(0,T;L^p(\Omega))$ $(1 < p, q < \infty)$ から取ったとき，

$$\|u_t\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))} + \|D^2 u\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))} \le C\|f\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))} \tag{1.8}$$

が成り立つ. また, 最大正則性定理 (1.8) から, (1.1) は強解 (方程式を二階弱微分の意味で満たす解) を持つことが知られている (cf. [20]). 一方で, $p=1$ のとき, 即ち外力が空間について $L^1(\Omega)$ であるとき, 最大正則性 (1.8) は破綻する. この意味で, $f \in L^q(0,T;L^1(\Omega))$ のときの時空間評価は臨界状態となっており, 空間方向に関して定常問題 (Poisson 方程式) を考察した際と同様の臨界状態となっていることがわかる.

この臨界評価の導出は最大正則性の理論とは別の観点から行う必要がある. Harada-Nagai-Senba-Suzuki [15] は Brezis-Merle と同様の指数可積分性を熱方程式の解に対して示した.

**命題 1.4** ([15, 24]). 外力を $f \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ とし, $u$ を熱方程式 (1.1) の強解とする. このとき, 任意の $0 \le \alpha < 4\pi$ に対してある定数 $C>0$ が存在して

$$\sup_{0<t<T} \int_\Omega \exp\left(\frac{\alpha|u(t,x)|}{\|f\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}}\right) dx \le C|\Omega| \tag{1.9}$$

が成り立つ. また, 可積分性の上限を与える指数の上限 $4\pi$ は最良である.

Nagai-Ogawa [24] は熱方程式の基本解を評価することによって, Harada-Nagai-Senba-Suzuki と類似の結果を得ている. さらに定理 1.3 と同様の指数可積分性が熱方程式の解に対して成り立つ.

**定理 1.5** ([17]). 指数 $p,q$ を $1<q\le\infty$, $0\le p\le 1$ とし, $f \in L^q(0,T;L(\log L)^p(\Omega))$ と仮定する. また, $u$ を二次元熱方程式 (1.1) の超関数解とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $1<q<\infty$, $0<p<1$, のとき, $u$ は $L^q\big(0,T;\exp L^{1/(1-p)}(\Omega)\big)$ に属し, ある正定数 $C=C(p,q)>0$ が存在して

$$\|u\|_{L^q(0,T;\exp L^{\frac{1}{1-p}}(\Omega))} \le C\|f\|_{L^q(0,T;L(\log L)^p(\Omega))} \tag{1.10}$$

を満たす.

(2) $q=\infty$, $0\le p<1$ のとき, $u$ は $L^\infty\big(0,T;\exp L^{1/(1-p)}(\Omega)\big)$ に属し, ある正定数 $C=C(p)>0$ が存在して

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;\exp L^{\frac{1}{1-p}}(\Omega))} \le C\|f\|_{L^\infty(0,T;L(\log L)^p(\Omega))}$$

を満たす.

(3) $1\le q\le\infty$, $p=1$ のとき, $u$ は $L^q\big(0,T;L^\infty(\Omega)\big)$ に属し, ある正定数 $C=C(q)>0$ が存在して

$$\|u\|_{L^q(0,T;L^\infty(\Omega))} \le C\|f\|_{L^q(0,T;L(\log L)^1(\Omega))}$$

を満たす.

**注意 1.5.1.** 外力項が時間に依存しない関数 $f(t,x)=f(x)$ であると仮定すると, 熱方程式の解は時刻無限大で定常問題の解に一様収束することが知られているため, 熱方程式の時空間可積分評価である命題 1.4 と定理 1.5 から, 定常問題の可積分評価である Brezis-Merle の不等式 (1.3) と定理 1.3 をそれぞれ導くことが出来る.

**注意 1.5.2.** 前述の最大正則性定理が, $f \in L^q(0,T;L(\log L)^p(\Omega))$ の場合にもしも成り立てば, Sobolev の埋め込み定理から解が満たす時空間可積分性はただちに決定される. Yao [29] は最大正則性定理を回帰的な Orlicz 空間に拡張したが, 定理 1.5 において外力を選ぶ空間である $L^q(0,T;L(\log L)^p(\Omega))$ は非回帰的な Banach 空間であるため, 彼らの議論は適用できない. また, 最大正則性定理は外力が $f \in L^1(0,T;L^p(\Omega))$ の場合には導かれないが, 定理 1.5 においては $q=1$ を含んでいる. さらに, Ogawa-Shimizu [25] は非回帰的な Besov 空間において最大正則性定理を証明が, Besov 空間と Lorentz-Zygmund 空間 $L(\log L)^p$ との包含関係が明らかでないため, 彼らの結果と定理 1.5 の関連性も明らかではない.

以上のように熱方程式に対する時空間可積分性と定常問題である Poisson 方程式の可積分性は密接な関係を持つ. そこで本稿では熱方程式において振動型の評価式を導出することを目標とする. 前節で言及したように, $BMO$ 評価 (1.4) からは, 最良定数 $4\pi$ 込みの Brezis-Merle 不等式 (1.3) は導くことができない. ここではこの関連性に注目し, 熱方程式において, 最良定数 $4\pi$ 込みの Brezis-Merle 型の不等式 (1.9) を含むような振動評価を導出することを目標とする.

## 2 準備

後に用いる再配列関数の基本的な性質を列挙しておく. 再配列関数は次の重要な性質を満たす.

**命題 2.1** (再配列関数の性質).

(1) $f^\sharp$ は球対称関数である.

(2) $f^\sharp$ は動径方向に関して単調非増加である.

(3) $B_R$ を $\Omega$ と同じ測度を持つ原点中心で半径 $R$ の球とする. このとき, 任意の有界変動関数 $\phi$ に対して,

$$\int_\Omega \phi(f(x))dx = \int_{B_R} \phi(f^\sharp(x))dx$$

が成り立つ.

**注意 2.1.1.** 命題 2.1 (3) について, 例えば $\phi$ が恒等写像のとき,

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{B_R} f^\sharp(x)dx$$

が成り立ち, $\phi(s) = e^s - 1$ のとき,

$$\int_\Omega \exp(f(x))dx = \int_{B_R} \exp(f^\sharp(x))dx$$

が成り立つ.

命題 2.1 の証明と, 再配列関数のその他の性質に関しては [6, 22, 30] を参照.

さて, 先に述べた問題の為に次の 振動型の集合 $W$ を考える. ここでの定義は Bennett-Sharpley[6] による.

**定義 2.2** ([6]). *BMO* 型の集合 $W$ を次で定義する. $B_R$ を $|B_R| = |\Omega|$ なる原点中心半径 $R$ の球とする.

$$W(\Omega) := \left\{ f \in L^1(\Omega); [f]_W := \sup_{0<r<R} (f^{\sharp\sharp}(r) - f^\sharp(r)) < \infty \right\}. \tag{2.1}$$

$W$ に属する関数に対して, John-Nirenberg の不等式に相当する評価が得られる.

**命題 2.3.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とし, $f \in W$ と仮定する. このとき, 任意の $0 < \alpha < 1/[f]_W$ に対して

$$\int_\Omega \exp \alpha |f(x)| dx < \infty$$

が成り立つ.

**命題 2.3 の証明.** 球対称関数を用いて考察するため, $B_R \subset \mathbb{R}^n$ を $\Omega$ と同じ測度を持つ原点中心の球とおく. 仮定から, 任意の $0 < r < R$ に対して

$$f^{\sharp\sharp}(r) - f^\sharp(r) \le [f]_W$$

である. ここで, $C_n = |B_1|$ とすると, 極座標変換を行うことにより

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} f^{\sharp\sharp}(r) &= \frac{d}{dr}\left( \frac{1}{C_n r^n} \int_{B_r} f^\sharp(x)dx \right) \\
&= \frac{d}{dr}\left( \frac{|S^{n-1}|}{C_n r^n} \int_0^r r^{n-1} f^\sharp(s)ds \right) \\
&= \frac{n}{r} \int_0^r r^{n-1} f^\sharp(r) - n \frac{|S^{n-1}|}{C_n r^{n+1}} \int_0^r r^{n-1} f^\sharp(s)ds \\
&= -\frac{n}{r}\left( f^{\sharp\sharp}(r) - f^\sharp(r) \right)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

であるから,

$$\frac{d}{dr} f^{\sharp\sharp}(r) \ge -\frac{n}{r}[f]_W$$

となる. 両辺を $(r, R)$ 上積分することにより,

$$f^{\sharp\sharp}(r) \le n[f]_W \log \frac{R}{r} + \frac{\|f\|_{L^1}}{|\Omega|}$$

を得る. よって, 命題 2.1 より,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp(\alpha|f(x)|)dx &= \int_{B_R} \exp(\alpha f^\sharp(x))dx \\ &= |S^{n-1}|\int_0^R r^{n-1}\exp(\alpha f^\sharp(r))dr \\ &\le |S^{n-1}|\int_0^R r^{n-1}\exp(\alpha f^{\sharp\sharp}(r))dr \\ &\le |S^{n-1}|\int_0^R r^{n-1}\exp(\alpha n[f]_W \log\frac{R}{r} + \alpha\frac{\|f\|_{L^1}}{|\Omega|})dr \\ &\le C\int_0^R r^{n-1-(\alpha n[f]_W)}dr\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで最右辺は $\alpha < \frac{1}{[f]_W}$ であれば収束するため, 命題2.3 が成り立つ. □

更に, $W$ と $BMO$ は次の包含関係を持つことが知られている.

**命題 2.4.** 次の包含関係が成り立つ.

$$BMO \subset W.$$

命題 2.4 の証明と $W$ の性質に関しては Bennett-Sharpley [6] を参照.

## 3 主結果と証明の概略

前述の $W$ を用いて次の 振動型の評価を得た.

**定理 3.1.** 外力を $f \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ とし, $\tilde{u}$ を次の球対称化熱方程式の超関数解とする.

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta\tilde{u} = f^\sharp, & (t,x) \in (0,T)\times B_R, \\ \tilde{u}(0,x) = 0, & x \in B_R, \\ \tilde{u} = 0, & (t,x) \in (0,T)\times\partial B_R. \end{cases} \tag{3.1}$$

このとき,

$$\sup_{0<t<T}[\tilde{u}(t)]_W \le \frac{1}{4\pi}\|f\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}$$

が成り立つ. また, 右辺の定数 $\frac{1}{4\pi}$ は最良定数である.

**注意 3.1.1.** この定理を用いて, 熱方程式に対する Brezis-Merle の不等式 (1.9) の指数可積分性を最良定数 $4\pi$ が自然に現れる形で得ることが出来る.

**注意 3.1.1 の証明.** 証明のために, 次の球対称関数に対する比較定理を用いる.

**命題 3.2** ([5, 23]). 外力項を $f \in L^2((0,T)\times\Omega)$ とする. さらに $u$ と $\tilde{u}$ はそれぞれ,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in} \quad (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad (0,T)\times\partial\Omega, \\ u = 0 & \text{in} \quad \{t=0\}\times\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = f^\sharp & \text{in} \quad (0,T)\times B_R, \\ \tilde{u} = 0 & \text{on} \quad (0,T)\times\partial B_R, \\ \tilde{u} = 0 & \text{in} \quad \{t=0\}\times B_R, \end{cases} \tag{3.3}$$

の弱解であるとする. このとき, 次の比較定理が成り立つ.

$$u^{\sharp\sharp}(t,x) \le \tilde{u}^{\sharp\sharp}(t,x) \quad \text{for all } (t,x)\in[0,T]\times B_R. \tag{3.4}$$

球対称解に対する比較定理は, Talenti [27] が楕円型方程式に対して証明したことを始めとし, 放物型方程式に対しては Bandle [5] は命題 3.2 を強解に対して示し, Mossino-Rakotoson [23] は弱解に対して証明した.

さて, 命題 2.3 から

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \exp\left(\frac{\alpha|\tilde{u}(x)|}{\|f\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}}\right)dx \\ &\quad \le |S^{n-1}|\int_0^R r^{n-1}\exp\left(\alpha\|f\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}n[\tilde{u}]_W \log\frac{R}{r} + \alpha\frac{\|\tilde{u}\|_{L^1}}{|\Omega|}\right)dr \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $n=2$, $\alpha<4\pi$ であること,

$$\frac{\|\tilde{u}\|_{L^1(\Omega)}}{|\Omega|} = u^{\sharp\sharp}(R) - u^\sharp(R) \le [\tilde{u}]_W$$

であることと定理 3.1 を用いると

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{\alpha|\tilde{u}(x)|}{\|f\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}}\right)dx \le C\int_0^R r e^{\frac{\alpha}{4\pi}\log\left(\frac{CR}{r}\right)^2} dr \le C'|\Omega|$$

が成り立つ. 最後に命題 3.2 を用いると, 解 $u$ の可積分性評価を得る. ここで外力項は $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ からとったため, 命題 3.2 の仮定を満たさないが, $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$f_k := \begin{cases} k\,\mathrm{sign}\, f, & k<|f(t,x)|, \\ f(t,x), & k\ge|f(t,x)| \end{cases}$$

と置き, $f_k$ に対して命題 3.2 を用いて極限をとることにより定理 3.1 を得る. □

## 3.1 定理 3.1 の証明の概略

証明はいくつかの段階に分けられる. まず, $\tilde{u}$ を考察する領域は原点中心の球であり, 外力項に球対称性と単調減少性を仮定しているので, 熱方程式 (3.1) の解自身も球対称, 単調減少となる. 従って, 熱方程式 (3.1) は

$$\tilde{u}^{\sharp}_t - \frac{(r\tilde{u}^{\sharp}_r)_r}{r} = f^{\sharp} \quad \text{in} \quad (0, R) \tag{3.5}$$

と書き直すことが出来る. ここで, 方程式の両辺を $(0, r)$ 上積分し, $\frac{2}{r^2}$ をかけることによって $\tilde{u}^{\sharp}_t$ は $\tilde{u}^{\sharp\sharp}_t$ と書き換えられ,

$$\tilde{u}^{\sharp\sharp}_t - \frac{2\tilde{u}^{\sharp}_r}{r} = f^{\sharp\sharp} \quad \text{in} \quad (0, R) \tag{3.6}$$

を得る. 方程式 (3.5) と (3.6) の両辺を引くことにより,

$$(\tilde{u}^{\sharp\sharp} - \tilde{u}^{\sharp})_t - \frac{(-r\tilde{u}^{\sharp}_r + 2\tilde{u}^{\sharp})_r}{r} = f^{\sharp\sharp} - f^{\sharp} \quad \text{in} \quad (0, R).$$

を得る. 後は,

$$-\frac{(-r\tilde{u}^{\sharp}_r + 2\tilde{u}^{\sharp})_r}{r} \tag{3.7}$$

を, 振動

$$v(r) = \tilde{u}^{\sharp\sharp}(r) - \tilde{u}^{\sharp}(r)$$

の式に書き換えれば良い. 実際, (2.2) において導出した関係式

$$\tilde{u}^{\sharp\sharp}_r = \frac{2}{r}(\tilde{u}^{\sharp} - \tilde{u}^{\sharp\sharp})$$

から,

$$\begin{aligned}
-r\tilde{u}^{\sharp}_r + 2\tilde{u}^{\sharp} &= r(\tilde{u}^{\sharp\sharp} - \tilde{u}^{\sharp})_r + 2\tilde{u}^{\sharp\sharp}, \\
(-r\tilde{u}^{\sharp}_r + 2\tilde{u}^{\sharp})_r &= (\tilde{u}^{\sharp\sharp} - \tilde{u}^{\sharp})_r + r(\tilde{u}^{\sharp\sharp} - \tilde{u}^{\sharp})_{rr} - \frac{4}{r}(\tilde{u}^{\sharp\sharp} - \tilde{u}^{\sharp})
\end{aligned}$$

であるので, (3.7) は

$$v_t - \left(\frac{v_r}{r} + v_{rr}\right) + \frac{4}{r^2}v = f^{\sharp\sharp} - f^{\sharp} \tag{3.8}$$

となる. また, $v$, $f^{\sharp\sharp} - f^{\sharp}$ は球対称関数であるので, (3.8) は

$$v_t - \Delta v + \frac{4}{|x|^2}v = f^{\sharp\sharp} - f^{\sharp} \quad \text{in} \quad x \in B_R(0) \subset \mathbb{R}^2 \tag{3.9}$$

となる. これにより振動 $v$ の満たす方程式が得られた.

しかし, Potential 項 $\frac{1}{|x|^2}$ を持つ熱方程式は解析が困難である. そのため, 次に (3.8), (3.9) で現れた Potential 項を消去することを目標とする. この目標のために $w = \frac{v}{r^2}$ と置き換えることにより,

$$v_r = 2rw + r^2 w_r$$
$$v_{rr} = 2w + 4rw_r + r^2 w_{rr}$$

となる. よって方程式 (3.8) は

$$w_t - \left(\frac{5}{r}w_r + w_{rr}\right) = \frac{f^{\sharp\sharp} - f^{\sharp}}{r^2}, \qquad \text{in} \quad r \in (0, R),$$

と書き換えられる. ここで左辺に現れた

$$\left(\frac{5}{r}w_r + w_{rr}\right)$$

は, 球対称関数の 6 次元における Laplacian であることに注意すると,

$$w_t - \Delta w = \frac{f^{\sharp\sharp} - f^{\sharp}}{|x|^2}, \qquad \text{in} \quad x \in B_R^{(6)}(0) \subset \mathbb{R}^6$$

と変形できる. ここで $B_R^{(6)}(0)$ は $\mathbb{R}^6$ 上の半径 $R$ とする原点中心の球である. これにより, Potential 項を消去することができ, 代わりに 6 次元の熱方程式の解について考察すればよいことになる. 最後にこの 6 次元熱方程式の解について時空間評価を考察することで, 求める評価を得る.

# 参考文献


[1] Adams, R. A., Fournier, J. J. F., "Sobolev Spaces," 2nd Ed. Academic Press, 2003.

[2] Alberico, A., Ferone, V., *Regularity properties of solutions of elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *in limit cases,* Rend. Mat. Acc. Lincei, s.9 **6**, (1995), 237–250.

[3] Aguilar, J. A., Peral, I., *An a priori estimate for the N-laplacian,* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I **319**, No. 3 (1994), 161–166.

[4] Brezis, H., Merle, F., *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of* $-\Delta u = V(x)e^u$ *in two dimentions,* Comm. Partial Differential Equations, **16** (1991), 1223–1253.

[5] Bandle, C., *On symmetrizations in parabolic equations,* J. Analyse Math. 30 (1976), 98–112.

[6] Bennett, C., Sharpley, R., "Interpolation of operators," Pure and applied mathematics, 1988.

[7] Boccardo, L., Peral, I., Vazquez, J., *The N-laplacian elliptic equation: variational versus entropy solution,* J. Math. Anal. Appl., **201** (1996), 671–688.

[8] Brezis, H., Merle, F., *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of* $-\Delta u = V(x)e^u$ *in two dimentions,* Comm. Partial Differential Equations, **16** (1991), 1223–1253.

[9] Cassani, D., Ruf, B., Tarsi, C., *Best constants in a borderline case of second-order Moser type inequalities,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **27** (2010), no. 1, 73–93.

[10] A. Cianchi, *An optimal interpolation theorem of Marcinkiewicz type in Orlicz spaces,* J. Funct. Anal., **153** (1998), 357–381.

[11] A. Cianchi, *Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces,* J. London Math. Soc., **60** (1999), 187–202.

[12] A. Cianchi, *Nonlinear potentials, local solutions to elliptic equations and rearrangements,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie V, **10** (2011), 335–361.

[13] Dolzmann, G., Hungerbühler, N., Müller, S., *Uniqueness and maximal regularity for nonlinear elliptic systems of n-Laplace type with measure valued right hand side,* J. reine angew. Math., **520** (2000), 1–35.

[14] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., "Elliptic partial differrential equations of second order," Springer-Verlag, 1983.

[15] Harada, G., Nagai, T., Senba, T., Suzuki, T., *Concentration lemma, Brezis-Merle type inequality, and a parabolic system of chemotaxis,* Adv. Differential Equations, **6** (2001), 1255–1280.

[16] Ioku, N., *Brezis-Merle type inequality for a weak solution to the N-Laplace equation in Lorentz-Zygmund spaces,* Differential Integral Equations, **22** (2009), 495-518.

[17] Ioku, N., *Brezis-Merle type inequality for a heat equation in two dimensions,* Differential Integral Equations, **24** (2011), 1021-1036.

[18] Ioku, N., *Some space-time integrability estimates of the solution for heat equations in two dimensions,* AIMS Proceedings, to appear.

[19] John, F., Nirenberg, L. *On functions of bounded mean oscillation,* Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 415–426.

[20] Kunstmann, P. C., Weis, L., " Maximal $L_p$-regularity for Parabolic Equations, Fourier Multiplier Theorems and $H^\infty$-functional Calculus, " Springer-Verlag, 2004.

[21] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'tseva, N. N., " Linear and quasilinear equations of parabolic type, " Amer. Math. Soc., Transl. Math. Monographs, Providence, P.I., 1968.

[22] Lieb, E. H., Loss, M., "Analysis," 2nd Ed. Amer. Math. Soc., 1991.

[23] Mossino, J., Rakotoson, J. M., *Isoperimetric inequalities in parabolic equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV, **13** (1986), no. 1, 51–73.

[24] Nagai, T., Ogawa, T., *Brezis-Merle inequalities and application to the global existence of the Cauchy problem of the Keller-Segel and self-interacting systems,* Commun. Contemp. Math., to appear.

[25] Ogawa, T., Shimizu, S., *End-point maximal regularity and its application to two-dimensional Keller-Segel system,* Math. Z. **264** (2010), no. 3, 601–628.

[26] Passarelli di Napoli, A., Sbordone, C., *Elliptic equations with right hand side in $L(\log L)^\alpha$,* Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **62** (1995), 301–314.

[27] Talenti, G., *Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces,* Annali Mat. Pura Appl., **120** (1979), 159–184.

[28] Trombetti, C., *Existence and regularity for a class of non-uniformly elliptic equations in two dimension,* Differential Integral Equations, **13** (2000), 687–706.

[29] Yao, F., *Regularity theory in Orlicz spaces for the parabolic polyharmonic equations,* Arch. Math., **90** (2008), 429–439.

[30] Ziemer, W.P., "Weakly differentiable functions," Springer-Verlag, 1989.